

Узагальнена математична модель тонкої несиметричної індуктивної діафрагми у прямокутному хвилеводі

Захарченко О. С., Мартинюк С. Є., Степаненко П. Я.

Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”

E-mail: novikos@bigmir.net

Методом інтегральних рівнянь розв'язано електродинамічну задачу знаходження узагальненої матриці розсіювання нескінченно тонкої несиметричної односторонньої індуктивної діафрагми у прямокутному хвилеводі. Одержано систему інтегральних рівнянь, порядок якої дорівнює числу власних хвиль прямокутного хвилеводу, що по черзі падають на діафрагму із лівої часткової області. Розв'язок кожного з них зводиться до системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів розкладу невідомого тангенціального електричного поля у отворі зв'язку по його власним координатним функціям. Вирішення даної системи визначає розподіл тангенціального електричного поля у вікні діафрагми, по якому обчислюється узагальнена матриця розсіювання неоднорідності, що розглядається. Проведено чисельне дослідження властивостей одержаного рішення і дано рекомендації щодо його практичного застосування.

Ключові слова: узагальнена матриця розсіювання; нескінченно тонка несиметрична індуктивна діафрагма; прямокутний хвилевід

Вступ

Прямокутний хвилевід з розміщеними у ньому неоднорідностями грає одну із провідних ролей у реалізації широкого класу компонентів мікрохвильової техніки. У якості таких неоднорідностей у прямокутному хвилеводі найбільшого поширення набули індуктивні діафрагми. У роботах [1–5] вказується на можливість застосування індуктивних діафрагм у якості елементів об'ємних резонаторів, мікрохвильових фільтрів, секцій диференціального фазового зсуву, пристроїв для вимірювання коефіцієнтів матриці розсіювання у хвилевідному тракті, вузлів узгодження коаксіально-хвилевідних переходів та комплексних навантажень. Найбільш повна бібліографія з питань розрахунку і застосування діафрагм у прямокутному хвилеводі представлена у роботі [6]. Із неї слідує, що побудова значної кількості мікрохвильових пристроїв заснована на використанні ідеальної моделі тонкої індуктивної діафрагми. Припущення нескінченно тонкої діафрагми [3–6] дозволяє значно спростити аналіз структури, оскільки вся її однохвильова матриця розсіювання визначається одним комплексним коефіцієнтом відбиття. В [5] показано, що характеристики діафрагми в площині її геометричного положення повністю визначаються через один параметр, який достатньо просто знаходиться експериментально.

Фактично можливість використання наближеної моделі діафрагми у вигляді її однохвильової матриці розсіювання і пов'язаної з нею реактивної провідності обмежена робочим діапазоном частот, при якому уздовж хвилеводу може поширюватися лише основна хвиля H_{10} . Використання цієї наближеної моделі при аналізі складної хвилевідної структури можливе лише у випадках, коли вищі типи хвиль, які збуджуються на одній неоднорідності, при своєму поширенні уздовж хвилеводу повністю затухають, не досягаючи сусідньої неоднорідності [3, 4]. Таким чином, інформації про реактивну провідність діафрагми недостатньо, якщо дана неоднорідність повинна використовуватись у з'єднанні декількох базових елементів, утворюючи складну поздовжню неоднорідну структуру. Для забезпечення можливості використання діафрагми у складі такої поздовжньої неоднорідної структури необхідно знати її узагальнену матрицю розсіювання, яка враховує взаємодію сусідніх неоднорідностей по вищих типах хвиль [7]. Використання останньої забезпечує можливість високоточного проектування складної поздовжньої неоднорідної структури із як завгодно близько розташованими неоднорідностями на відміну від наближеної моделі, яка в цих умовах дає значну похибку.

В [7] обґрунтована необхідність розробки високоякісної елементної бази мікрохвильової техніки за рахунок зменшення похибок розрахунків, що

досягається створенням більш точних електродинамічних моделей, заснованих на методі узагальненої матриці розсіювання. Таким чином, підвищення вимог до характеристик деяких пристроїв мікрохвильової техніки обумовлює необхідність перегляду існуючих електродинамічних методів у відношенні підвищення точності розрахунків узагальнених матриць розсіювання неоднорідностей у прямокутному хвилеводі і в першу чергу тонких індуктивних діафрагм.

Підвищення ефективності проектування мікрохвильових пристроїв передбачає урахування несиметричності конструкції, яка неодмінно з'являється в кожному реальному зразку внаслідок неточностей виготовлення. Тому особливу увагу слід приділяти неоднорідностям із несиметричним розташуванням відносно поздовжньої площини симетрії прямокутного хвилеводу. Якщо неодмінною умовою проектування будь-якого надвисокочастотного вузла є оцінка допусків на виготовлення, то розрахункову модель необхідно будувати з урахуванням несиметричності конструкції. Зазвичай відхилення розмірів структури від ідеалізованих моделей дуже малі. Тому відчуті зміни характеристик пристрою внаслідок похибок виготовлення можна за допомогою лише алгоритмів з високою точністю обчислень.

Як наслідок, для проектування надвисокочастотних пристроїв з урахуванням можливих неточностей виготовлення необхідно мати серію алгоритмів розрахунку несиметричних структур, які з'являються в кожному реальному пристрої у процесі виробництва. Як передбачається, ці алгоритми можуть бути одержані шляхом реалізації рішень складних електродинамічних задач. Тому виключно важливо мати базу числових даних, які можна було б використати для налагодження зазначених алгоритмів. Одним із шляхів розв'язання цієї важливої проблеми є одержання високоточних рішень електродинамічних задач для класичного базового елемента у вигляді тонкої несиметричної односторонньої індуктивної діафрагми у прямокутному хвилеводі. У даній роботі розглядається задача узагальнення існуючого рішення на випадок дифракції на нескінченно тонкій діафрагмі всього спектру електромагнітних хвиль H_{m0} . Одержані результати справедливі для реальних хвилевідних структур, у яких використання математичної моделі нескінченно тонкої діафрагми є адекватним наближенням. Особливої уваги заслуговує можливість створення бази даних для налагодження алгоритмів розв'язання задач по визначенню допусків на виготовлення мікрохвильових пристроїв на основі індуктивних неоднорідностей у прямокутному хвилеводі. Результати даної роботи можуть знайти застосування при розробках алгоритмів швидкого і високоточного обчислення частотних характеристик багатоступінчастих несиметричних хвилевідних структур.

1 Математична модель діафрагми

Електродинамічна структура, що розглядається, схематично зображена на рис. 1, де показано поздовжній переріз прямокутного хвилеводу шириною a з нескінченно тонкою діафрагмою, ширина вікна якої позначена літерою c . На рис. 1 відсутнє позначення висоти хвилеводу, оскільки розглядається скалярна задача, розв'язок якої не залежить від величини b . Виконаємо електродинамічний аналіз фізичної моделі, зображеної на рис. 1, з метою знаходження її узагальненої матриці розсіювання, використання якої гарантує високоточне моделювання діафрагми у складі будь-якої поздовжньо неоднорідної структури у прямокутному хвилеводі із як завгодно малими відстанями між сусідніми неоднорідностями. Будемо виходити із загально відомого позначення узагальненої матриці розсіювання [8] $S_{mn}^{(\mu\nu)}$, яке означає, що n -та хвиля ν -го хвилеводу перетворюється у m -ту хвилю μ -го хвилеводу, де $m = 1, 2, \dots, M$; $n = 1, 2, \dots, N$. Знаходження $S_{mn}^{(\mu\nu)}$ даної структури передбачає розв'язання N задач дифракції електромагнітних хвиль на діафрагмі. Із цього позначення слідує, що власні функції прямокутного хвилеводу і вікна діафрагми нумеруються одним індексом, зазвичай у порядку зростання критичних хвильових чисел. Для визначення параметрів узагальненої матриці розсіювання виберемо метод інтегральних рівнянь, який дозволяє об'єднати всі N розв'язків електродинамічних задач дифракції в одну обчислювальну процедуру.

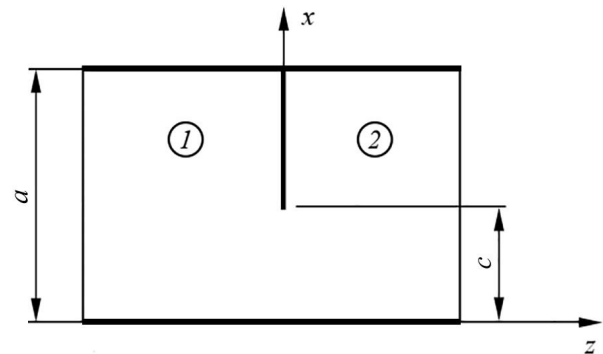


Рис. 1. Фізична модель тонкої діафрагми

Розв'язання ключової задачі проводимо у наближенні ідеальної провідності діафрагми і металічних стінок незаповненого діелектриком прямокутного хвилеводу. Прийmemo для простоти, що вхідний і вихідний хвилеводи однакові, а власні функції часткових областей по обидві сторони діафрагми ідентичні. Для цього випадку в роботі [6] одержано інтегральне рівняння відносно невідомого тангенціального електричного поля у вікні діафрагми при падінні на електродинамічну структуру, що розглядається, основної хвилі H_{10} прямокутного хвилеводу. Воно дозволяє обчислювати вхідну комплексну

провідність діафрагми в діапазоні частот, в якому можливе поширення лише основної хвилі прямокутного хвилеводу.

Один із шляхів розв'язання електродинамічної задачі, що розглядається, бачиться в узагальненні одержаного в [6] інтегрального рівняння на випадок падіння із лівої часткової області на діафрагму всього спектру первинних електромагнітних хвиль H_{n0} . З огляду на однорідність структури уздовж осі y електричний вектор кожної з цих хвиль має відмінну від нуля лише компоненту, паралельну вузькій стінці хвилеводу. Аналітичні вирази для власних функцій хвилеводу і діафрагми знаходяться згідно із загально відомим визначенням узагальненої матриці розсіювання $S_{mn}^{(\mu\nu)}$. Дотримуючись методики прирівнювання тангенціальних складових електричних і магнітних полів на границі поділу часткових областей, як у роботі [6], одержимо узагальнену систему інтегральних рівнянь

$$\sum_m Y_m \Psi_m \int_c E \Psi_m dc = Y_n \Psi_n, \quad (1)$$

де E – невідоме тангенціальне електричне поле у отворі зв'язку; Ψ_m , Ψ_n – тангенціальні складові власних скалярних функцій прямокутного хвилеводу; Y_m , Y_n – відповідні їм провідності; $m = 1, 2, \dots, M$; $n = 1, 2, \dots, N$; M – число хвиль, які враховуються у розкладанні електричного поля у хвилеводі; N – число хвиль, які по черзі падають на неоднорідність, утворюючи послідовність задач дифракції; c – ширина вікна діафрагми.

Для кожного n розв'язуємо систему інтегральних рівнянь (1), використовуючи метод Гальоркіна [9]. Відповідно до цього методу невідоме тангенціальне електричне поле E у отворі зв'язку апроксимуємо рядами координатних функцій (власних хвиль) вікна діафрагми

$$E = \sum_k D_k \Phi_k, \quad (2)$$

де D_k – невідомі комплексні коефіцієнти; $k = 1, 2, \dots, K$; K – число координатних функцій, які враховуються у розкладанні.

Підставляючи (2) в (1) і виконуючи перетворення у відповідності з методом Гальоркіна, для кожного n одержуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно комплексних коефіцієнтів розкладу тангенціального електричного поля у отворі зв'язку в ряд по системі його координатних функцій

$$\sum_k D_k \sum_m Y_m \eta_{lm} \eta_{km} = Y_n \eta_{ln}; \quad l = 1, 2, \dots, L, \quad (3)$$

де $k = 1, 2, \dots, K$; $n = 1, 2, \dots, N$; η_{km} – коефіцієнт зв'язку k -тої координатної функції вікна діафрагми Φ_k і m -тої власної функції прямокутного хвилеводу Ψ_m ; аналогічний зміст мають коефіцієнти η_{lm} , η_{ln} .

В аналітичному вигляді ці коефіцієнти можуть бути записані як

$$\begin{aligned} \eta_{km} &= \int_c \Phi_k \Psi_m dc; \\ \eta_{lm} &= \int_c \Phi_l \Psi_m dc; \quad \eta_{ln} = \int_c \Phi_l \Psi_n dc. \end{aligned} \quad (4)$$

Зазначимо, що ліва частина співвідношення (3) утворює квадратну матрицю коефіцієнтів при невідомих, де індекс k розгортає систему по рядках, а індекс l по стовпцях. Кожна складова матриці правих частин (3) відповідає рішенням окремої задачі дифракції як результат падіння на діафрагму заданої власної хвилі прямокутного хвилеводу. Видно, що квадратна матриця коефіцієнтів при невідомих не залежить від вигляду правої частини системи (3). Це дає змогу для вирішення (3) використати програму розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь з багатьма правими частинами. При цьому заздалегідь повинні бути знайдені всі складові, які формують матрицю коефіцієнтів.

Щоб знайти розрахункові співвідношення для обчислення коефіцієнтів зв'язку η_{km} , η_{lm} і η_{ln} , необхідно задати аналітичні вирази для тангенціальних складових електричних полів у хвилеводі та вікні діафрагми. Вигляд кожного такого виразу залежить від розташування хвилевідної структури з діафрагмою відносно прямокутної системи координат. Існує декілька можливих випадків зображення фізичної моделі діафрагми відносно прямокутної системи координат. Однак, всі вони приводять до однакового кінцевого результату, не дивлячись на деякі відмінності у формулах для обчислення коефіцієнтів зв'язку. Проілюструємо це положення на прикладі двох основних зображень діафрагми відносно прямокутної системи координат. Для випадку розташування діафрагми, як зображено на рис. 1, у відповідності до [10] маємо

$$\Psi_m = A_m \sin \alpha_m x; \quad \Phi_k = B_k \sin \beta_k x, \quad (5)$$

де $\alpha_m = m\pi/a$; $\beta_k = k\pi/c$; $A_m = \sqrt{2/a}$; $B_k = \sqrt{2/c}$.

Для обчислення η_{km} необхідно в перше рівняння (4) підставити значення тангенціальних складових електричних функцій (5) і виконати інтегрування. Таким чином, маємо

$$\eta_{km} = \int_c 2/\sqrt{ac} \sin \beta_k x \sin \alpha_m x dc. \quad (6)$$

Підставляючи (5) в формулу (6) і виконуючи інтегрування в межах від 0 до c у відповідності з [11], одержуємо

$$\eta_{km} = \frac{1}{\sqrt{ac}} \left[\frac{\sin(\beta_k - \alpha_m)x}{\beta_k - \alpha_m} - \frac{\sin(\beta_k + \alpha_m)x}{\beta_k + \alpha_m} \right]. \quad (7)$$

Надалі підставляємо в (7) межі інтегрування $x = 0$ та $x = c$ і використовуємо формули перетворень тригонометричних функцій [11]. В результаті

перетворення останнього виразу з урахуванням меж інтегрування одержуємо

$$\eta_{km} = \frac{2}{\sqrt{ac}} \frac{-(-1)^k \beta_k \sin \alpha_m c}{\beta_k^2 - \alpha_m^2}. \quad (8)$$

Коефіцієнти зв'язку η_n ідентичні η_{km} , якщо у виразі (8) виконати заміну індексів k, m на l, n . Аналогічно, коефіцієнти зв'язку η_m обчислюються по співвідношенню (8) при заміні k індексом l .

Зазначимо, що формули (5) – (8) одержані для випадку розташування діафрагми всередині прямокутного хвилеводу, як показано на рис. 1. Існує також важлива альтернативна фізична модель, коли діафрагма розташовується на протилежній стороні хвилеводу.

Для другого випадку розташування діафрагми всередині прямокутного хвилеводу замість формул (5) маємо

$$\Psi_m = A_m \sin \alpha_m x; \quad \Phi_k = B_k \sin \beta_k [x - (a - c)]. \quad (9)$$

Підставляючи співвідношення (9) в першу формулу (4) і обчислюючи інтеграл у відповідності з [11], знаходимо

$$\eta_{km} = \frac{1}{\sqrt{ac}} \left\{ \frac{\sin(\beta_k - \alpha_m)x - \beta_k(a - c)}{\beta_k - \alpha_m} - \frac{\sin(\beta_k + \alpha_m)x - \beta_k(a - c)}{\beta_k + \alpha_m} \right\} \quad (10)$$

в межах інтегрування від $x = a - c$ до $x = a$. Підставляючи в (10) межі інтегрування і проводячи відповідні перетворення, одержуємо

$$\eta_{km} = \frac{2}{\sqrt{ac}} \frac{-(-1)^m \beta_k \sin \alpha_m c}{\beta_k^2 - \alpha_m^2}. \quad (11)$$

Можна бачити, що вираз (11) відрізняється від співвідношення (8) тільки множником $(-1)^m$, що приводить лише до змін знаків і не порушує чисельних значень коефіцієнтів матриці (3). Як результат, кінцеві значення елементів матриці розсіювання діафрагми для обох розглянутих випадків повністю співпадають. Ці дані підтверджують інваріантність положення діафрагми відносно прямокутної системи координат.

Для коректного розрахунку матриці розсіювання при апроксимації тангенціального електричного поля у вікні діафрагми згідно з формулою (2) будемо використовувати загально відоме співвідношення [8]

$$K/M = c/a. \quad (12)$$

Це співвідношення знайдено емпірично на основі рішень численних задач дифракції електромагнітних хвиль на неоднорідностях у прямокутному хвилеводі. Воно дозволяє із численних розв'язків системи лінійних алгебраїчних рівнянь (3) вибрати

одне рішення, яке коректно відображає поведінку тангенціального електричного поля у вікні діафрагми. Слід зазначити, що за винятком декількох випадків співвідношення (12) практично ніколи не виконується точно, оскільки значення K і M можуть відображатися лише цілими числами. Таким чином, для практичних розрахунків співвідношення (12) необхідно замінити його наближеним аналогом

$$K/M \simeq c/a. \quad (13)$$

Аналізуючи рішення задачі з використанням формули (13), можна бачити, що при малих значеннях K і M ліва частина цього співвідношення значно відрізняється від правої. Це свідчить про те, що при малих значеннях K і M неможливо одержати розв'язок електродинамічної задачі з високою точністю. При збільшенні величин K і M співвідношення (13) все більше прямує до точного значення (12).

Розглядаючи співвідношення (8) і (11), можна бачити, що у даному вигляді вони мають області змін параметрів β_k і α_m , де їх різниця суттєво зменшується, прямує до нуля. Це явище значно погіршує умови для досягнення високої точності результатів розрахунку матриці розсіювання діафрагми. З підвищенням порядку системи лінійних алгебраїчних рівнянь (3), що необхідно для одержання результатів з високою точністю, збільшується ймовірність появи такої ситуації, коли має місце значна похибка обчислення коефіцієнтів зв'язку η_{km} , η_{lm} і η_n внаслідок зменшення числа вірних десяткових знаків у знаменниках формул (8) і (11). Таким чином, бажання одержати розв'язок електродинамічної задачі з високою точністю обумовлює необхідність пошуку найбільш прийнятних способів обчислення коефіцієнтів матриці (3), які б забезпечували відсутність похибок у всьому діапазоні зміни розмірів діафрагми і частоти. Для обчислення коефіцієнтів зв'язку може використовуватися асимптотичне наближення, коли знаменники формул, подібних до (8) і (11), прямують до нуля. Однак, як показує аналіз цих асимптотичних наближень, вони забезпечують високу адекватність лише при значеннях знаменників, у нашому випадку $\beta_k^2 - \alpha_m^2$, дуже близьких до нуля. Для більш віддалених від нуля значень знаменників, зазначені формули не дають гарантованої точності обчислень. Тому автори більшості робіт, присвячених аналізу індуктивних діафрагм у прямокутному хвилеводі, обчислюють коефіцієнти зв'язку шляхом чисельного інтегрування.

Як слідує із теорії чисельного інтегрування [12], цей спосіб знаходження коефіцієнтів зв'язку можна з успіхом використовувати при відносно невисоких порядках K системи (3). Значення K залежить від розмірів структури та частоти і значною мірою від вибраного методу інтегрування. Для всієї сукупності цих факторів необхідне додаткове дослідження

області придатності вибраного методу чисельного інтегрування.

2 Чисельні результати

Одним із найбільш ефективних способів інтегрування швидко осцилюючих функцій є підхід, заснований на використанні методу Гауса. Для подальшого дослідження будемо використовувати розроблений алгоритм чисельного інтегрування, заснований на 96-точковій квадратурній формулі Гауса. Згідно з базовою формулою методу Гауса [12] одномірний інтеграл від функції одної змінної може бути записаний у вигляді

$$\int_g^h f(x)dx = \frac{h-g}{2} \sum_i f(x_i)u_i, \quad (14)$$

де $x_i = (g+h)/2 + (h-g)/2v_i$; $i = 1, 2, \dots, 96$; u_i , v_i – табличні значення коефіцієнтів розкладу в ряд функції $f(x)$.

Застосуємо формулу (14) для чисельного обчислення розглянутих коефіцієнтів зв'язку. У відповідності з (14) формула (6) набуває вигляду

$$\eta_{km} = \sqrt{\frac{c}{a}} \sum_i u_i \sin \beta_k x_i \sin \alpha_m x_i, \quad (15)$$

де $x_i = c/2 + c/2v_i$; $i = 1, 2, \dots, 96$.

Для розглянутого альтернативного випадку, коли діафрагма розташована на протилежній стороні хвилеводу відповідно до формули (14) маємо

$$\eta_{km} = \sqrt{c/a} \sum_i u_i \sin \beta_k [x_i - (a-c)] \sin \alpha_m x_i, \quad (16)$$

де $x_i = (2a-c)/2 + c/2v_i$; $i = 1, 2, \dots, 96$.

Щоб оцінити області придатності вибраного методу чисельного інтегрування, було проведено розрахунки коефіцієнтів зв'язку η_{km} за формулами (8), (11), (15) і (16) з контролем точності обчислення співвідношення $\beta_k^2 - \alpha_m^2$. Порівняльний аналіз цих результатів свідчить про те, що для невисоких значень k і m чисельні значення η_{km} , знайдені за аналітичними формулами (8) та (11), з високою точністю відповідають даним, одержаним за допомогою співвідношень (15), (16) для чисельного обчислення. Дані обчислень суттєво розходяться, коли один із індексів k або m наближається до порядку формули Гауса. Таким чином, для високоточних розрахунків слід користуватися аналітичними формулами (8), (11) з обов'язковим контролем точності обчислення співвідношення $\beta_k^2 - \alpha_m^2$. Останню процедуру можна суттєво спростити, якщо реальну структуру хвилеводу з діафрагмою замінити фізичною моделлю, у якій один із розмірів збільшується

або зменшується на деяку малу величину δ , наприклад,

$$\begin{aligned} c(\text{фізичної моделі}) &= \\ &= c(\text{реальної структури}) \pm 10^{-\tau} \times \delta. \end{aligned} \quad (17)$$

Правильний вибір величин τ і δ полегшує одержання результатів з високою точністю. Якщо потрібно одержати 6 правильних значущих цифр результату обчислення коефіцієнтів зв'язку, то $\tau = 6$, а δ повинно бути дробовим ірраціональним числом, наприклад, $\delta = 0,1113171923$. Вибір таких значень τ і δ дає гарантію того, що при будь-яких порядках K системи лінійних алгебраїчних рівнянь (3) співвідношення $\beta_k^2 - \alpha_m^2$ не прямуватиме до нуля, а реальна структура буде адекватно описана фізичною моделлю.

Використовуючи одержані аналітичні співвідношення, обчислення узагальненої матриці розсіювання проводимо у наступній послідовності. Задаючись значеннями K і M , відповідно до відомих розмірів структури обчислюємо матрицю коефіцієнтів зв'язку. Для відомого значення частоти обчислюємо нормовані провідності хвиль, які враховуються у розв'язку задачі дифракції. Одержані дані використовуємо для формування матриці коефіцієнтів при невідомих. Останню матрицю завантажуюмо у програму розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь з багатьма правими частинами. Розв'язок даної системи визначає розподіл тангенціального електричного поля у вікні діафрагми. По даному розподілу знаходимо узагальнену матрицю розсіювання діафрагми, використовуючи формули, подібні до [13].

Дослідження властивостей одержаних рішень почнемо із аналізу вхідної провідності нескінченно тонкої індуктивної діафрагми, ширина вікна якої дорівнює половині ширини прямокутного хвилеводу $c = a/2$. Вивчення характеристик несиметричної діафрагми є ключовою задачею даного розгляду, оскільки для цього випадку існує точне рішення. В [6] приведено обчислене з високою точністю значення реактивної провідності діафрагми для відношення $c = a/2$ і величини частотного параметру $2a/\lambda = 1, 4$, де λ – довжина хвилі у вільному просторі. Для прямокутного хвилеводу з розміром широкої стінки 48 мм це значення частотного параметру відповідає робочій частоті 4,371974 ГГц. На даній частоті значення нормованої вхідної провідності діафрагми у відповідності з [6] дорівнює

$$Y_1 = (1-R_1)/(1+R_1) = G+jB = 1-4,835147j, \quad (18)$$

де R_1 – коефіцієнт відбиття хвилі H_{10} від діафрагми; G – активна складова, що чисельно дорівнює відношенню хвильових опорів хвилеводів по обидві сторони від діафрагми; B – нормована реактивна провідність діафрагми, що вивчається у даній роботі.

При чисельних дослідженнях поряд з нормованою вхідною провідністю у якості характеристик діафрагми будемо використовувати модуль і фазу коефіцієнта проходження основної хвилі прямокутного хвилеводу через неоднорідність, як елемент однохвильової матриці розсіювання. Чисельні значення модуля $\mu = |S_{11}^{(21)}|$ і фази $\varphi = \arg[S_{11}^{(21)}]$ коефіцієнта проходження, обчислені згідно з точним значенням (18) вхідної провідності діафрагми, відповідно дорівнюють $\mu = 0,3822293$ і $\varphi = 67,528159^\circ$. Всі результати досліджень одержано для фізичної моделі діафрагми згідно з формулою (17). Для порядків $K = 100$ системи лінійних алгебраїчних рівнянь, які найчастіше використовуються на практиці, розрахунок за розробленим алгоритмом дає наступні значення модуля та фази коефіцієнта проходження відповідно $\mu = 0,382334$ і $\varphi = 67,5217^\circ$.

Розроблений алгоритм дозволяє оцінити граничні можливості даної реалізації методу інтегральних рівнянь при апроксимації тангенціального електричного поля у вікні діафрагми рядами власних скалярних функцій. У табл. 1 наведено дані розрахунку модуля і фази коефіцієнта проходження в залежності від порядку системи лінійних алгебраїчних рівнянь (3) при високих значеннях K . Видно, що з підвищенням K результати розрахунків модуля і фази коефіцієнта проходження основної хвилі через діафрагму повільно прямують до точних значень. Останні результати, обмежені значенням $K = 3800$, одержані при значних витратах машинного часу. Тому можна вважати, що розрахунки параметрів діафрагми при більш високих значеннях K практично не доцільні навіть при використанні комп'ютерів великої продуктивності. Даному значенню K відповідають похибки обчислення фази коефіцієнта проходження $\delta = 0,0000303^\circ$ і реактивної провідності $1,4477 \times 10^{-4}$.

Табл. 1 Збіжність результатів для коефіцієнта проходження

K	μ	φ , град
2200	0,38223040	67,528093
2600	0,38223017	67,528107
3000	0,38223001	67,528117
3400	0,38222990	67,528123
3800	0,38222982	67,528129

Розглянемо характеристики одержаного рішення, коли відношення c/a виражається числом дробовим і співвідношення (12) перетворюється в нерівність (13). Нехай $K = 3800$, тоді згідно з (12) $M = 7600$. Збільшуємо значення M на одиницю останнього знака і проводимо розрахунок характеристик тонкої несиметричної діафрагми з відношенням розмірів $c/a = 0,5$, для якого має місце точне рішення (18). У результаті розрахунку одержуємо значення реактивної провідності діафрагми $B = -4,835154$. Проводячи розрахунок реактивної провідності діафрагми для значення M , зменшеного

на одиницю останнього знака, одержуємо наступний результат $B = -4,835107$. Для більш низьких значень $M = 401$ і $M = 399$ відповідно одержуємо $B = -4,835726$ і $B = -4,831858$. Реактивна провідність діафрагми при дотриманні (12) і значеннях $K = 200$ та $M = 400$ дорівнює $B = -4,834597$. Одержані результати свідчать про те, що будь-яке відхилення K і M від значень, які відповідають співвідношенню (12), збільшує похибки розрахунку. Ці похибки зменшуються при збільшенні порядку K системи лінійних алгебраїчних рівнянь (3). Якщо розміри структури з діафрагмою приводять до дробового відношення c/a , то його потрібно округляти в сторону збільшення. У цьому випадку похибка від наближеного характеру співвідношення (13) буде менше впливати на результати розрахунку.

Проведемо оцінку відносної похибки розрахунку реактивної провідності діафрагми в залежності від порядку K системи лінійних алгебраїчних рівнянь (3), базуючись на дані обчислень, показаних на рис. 2а і рис. 2б. Видно, що відносна похибка обчислення реактивної провідності діафрагми при малих порядках K системи лінійних алгебраїчних рівнянь (3) спочатку швидко зменшується, як це показано на рис. 2а. А потім після досягнення деякого K (у даному випадку 40) реактивна провідність нескінченно тонкої несиметричної діафрагми повільно прямує до точного значення (18), а похибка її обчислення до мінімальної величини, як це показано на рис. 2б.

Користуючись графіками, показаними на рис. 2а і рис. 2б, можна визначити порядок K , при якому слід розв'язувати систему рівнянь (3) для досягнення необхідної точності розрахунку реактивної провідності і всієї узагальненої матриці розсіювання діафрагми.

Для ілюстрації можливості обчислення узагальненої матриці розсіювання наводимо приклад знаходження коефіцієнта відбиття хвилі H_{20} від діафрагми, як елемента $S_{22}^{(11)}$. Виконуючи відповідні розрахунки для відношення розмірів вікна діафрагми і хвилеводу $c/a = 0,5$ і частотного параметру $2a/\lambda = 2,2$, що для хвилеводу шириною 48 мм відповідає частоті 6,870245 ГГц, маємо

$$S_{22}^{(11)} = (-0,656089; 0,092295j); \quad (19)$$

$$|S_{22}^{(11)}| = 0,662549; \quad \arg[S_{22}^{(11)}] = 171,992473^\circ.$$

Щоб переконатися у коректності значення (19), необхідно мати надійні результати, які можна було б використати для порівняння. Оскільки необхідні дані по розрахунку узагальненої матриці розсіювання діафрагми невідомі, проводимо відповідні обчислення, використовуючи широко відомий метод FDTD [14]. Загально відомо, що метод FDTD має обмежені можливості досягнення високої точності розрахунку структур з гострими ребрами, що мають сильну особливість тангенціального електричного поля. Тому проводимо обчислення для

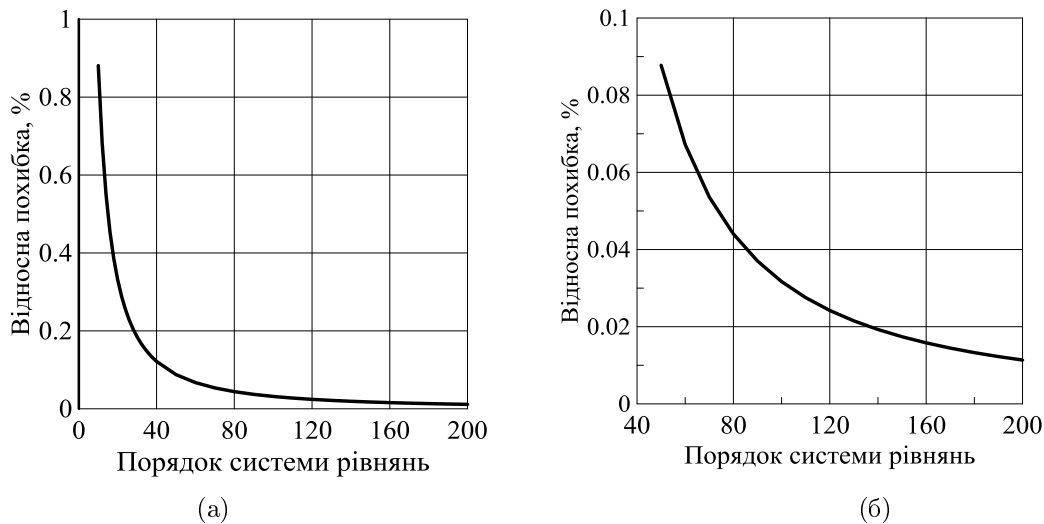


Рис. 2. Відносна похибка розрахунку реактивної провідності діафрагми в залежності від порядку K системи лінійних алгебраїчних рівнянь (3).

діафрагм різної товщини t і використовуємо для одержання необхідних даних метод екстраполяції. За результатами розрахунку методом FDTD було побудовано графіки залежностей модуля і фази коефіцієнта відбиття хвилі H_{20} як функції товщини діафрагми. Аналіз зазначених залежностей свідчить про те, що при зменшенні товщини діафрагми результати обчислень повільно наближаються до високоточного значення (19) з похибками, які не перевищують 0,2% по модулю коефіцієнта відбиття і $0,5^\circ$ по фазі при $t = 0$. Підсумовуючи одержані дані, можна зробити висновок, що розроблений у роботі алгоритм може бути успішно використаний спільно з методом FDTD при необхідності розрахунку з'єднань прямокутних хвилеводів у H площині, які у своєму складі містять тонкі несиметричні діафрагми.

Висновки

У строгій постановці одержано розв'язок електродинамічної задачі знаходження узагальненої матриці розсіювання нескінченно тонкої несиметричної односторонньої індуктивної діафрагми у прямокутному хвилеводі шляхом узагальнення існуючого рішення на випадок дифракції на діафрагмі всього спектру електромагнітних хвиль H_{m0} . Задача зводиться до розв'язання системи інтегральних рівнянь по числу хвиль, падаючих на діафрагму. Для кожного з них методом Гальборкіна одержано систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів розкладу невідомого тангенціального електричного поля у вікні діафрагми по його власним координатним функціям. Розв'язок системи базується на обчисленні коефіцієнтів зв'язку координатних функцій вікна діафрагми з тангенціальними складовими електричних полів у хвилеводі.

Розглянуто два підходи до знаходження коефіцієнтів зв'язку, один з яких передбачає одержання і використання аналітичних виразів. Інший підхід заснований на чисельному інтегруванні добутку координатних функцій вікна діафрагми і власних функцій хвилеводу. Метою використання чисельного інтегрування методом Гауса є підтвердження коректності результатів розрахунку за аналітичними формулами. Проведено порівняння результатів обчислень на основі двох згаданих підходів. Показано, що при невисоких значеннях індексів координатних функцій вікна діафрагми і електромагнітних хвиль у хвилеводі результати розрахунків співпадають з високою точністю. Дані обчислень суттєво розходяться, коли один із зазначених індексів прямує до порядку квадратурної формули Гауса. Зроблено висновок, що для високоточного знаходження елементів узагальненої матриці розсіювання необхідно використовувати лише аналітичні співвідношення.

Проведено оцінку граничних можливостей даної реалізації методу інтегральних рівнянь при апроксимації тангенціального електричного поля у вікні діафрагми рядами власних скалярних функцій. Показано, що з підвищенням порядку системи лінійних алгебраїчних рівнянь результати розрахунків модуля і фази коефіцієнта проходження основної хвилі через діафрагму повільно прямують до точних значень.

Розглянуто характеристики одержаного рішення, коли відношення розмірів вікна діафрагми та хвилеводу виражається числом дробовим і співвідношення (12) перетворюється у нерівність (13). Одержані результати свідчать про те, що будь-яке відхилення K і M від значень, які відповідають співвідношенню (12), збільшує похибки розрахунку. Ці похибки зменшуються при збільшенні порядку K системи лінійних алгебраїчних рівнянь (3). Якщо розміри структури з діафрагмою приводять до дробового відношення c/a , то його потрібно округляти

в сторону збільшення. У цьому випадку похибка від наближеного характеру співвідношення (13) буде менше впливати на результати розрахунку.

Проведено оцінку відносної похибки розрахунку реактивної провідності діафрагми в залежності від порядку K системи лінійних алгебраїчних рівнянь (3). Користуючись одержаними даними, можна визначити порядок K , при якому слід розв'язувати систему рівнянь (3) для досягнення необхідної точності розрахунку реактивної провідності і всієї узагальненої матриці розсіювання діафрагми.

Для ілюстрації можливості обчислення узагальненої матриці розсіювання наведено приклад знаходження коефіцієнта відбиття хвилі H_{20} від діафрагми, як елемента $S_{22}^{(11)}$. Щоб перекоонатися у коректності одержаного значення $S_{22}^{(11)}$, проведено відповідні обчислення з використанням широко відомого методу FDTD. З цією метою виконано обчислення для діафрагм різної товщини і використано метод екстраполяції для одержання необхідних даних. Показано, що при зменшенні товщини діафрагми результати обчислень повільно наближаються до високоточного значення з похибками, які не перевищують 0,2 % по модулю коефіцієнта відбиття і $0,5^\circ$ по фазі при $t = 0$. Таким чином, розроблений у роботі алгоритм може бути успішно використаний спільно з методом FDTD при необхідності розрахунку з'єднань прямокутних хвилеводів у H площині, які у своєму складі містять тонкі несиметричні діафрагми.

Одержане у роботі рішення може бути використано при розв'язанні задач по визначенню допусків на виготовлення мікрохвильових пристроїв на основі індуктивних неоднорідностей у прямокутному хвилеводі. Результати дослідження діафрагми за допомогою даного алгоритму мають не тільки самостійне значення, а також можуть бути використані для контролю точності обчислення електродинамічних параметрів тонких структур за допомогою загальних методів розв'язання електродинамічних задач, наприклад FDTD. Результати даної роботи можуть знайти застосування при розробках алгоритмів швидкого і високоточного обчислення частотних характеристик багатоступінчастих несиметричних хвилевідних структур.

Перелік посилань

1. Дробахин О. О. Техника и полупроводниковая электроника СВЧ / О.О. Дробахин, С.В. Плаксин, В.Д. Рябчий, Д.Ю. Салтыков. – Севастополь: Вебер, 2013. – 322 с.
2. Ruiz-Cruz J. A. Computer Aided Design of Waveguide Devices by Mode-Matching Methods / J.A. Ruiz-Cruz, J.R. Montejo-Garai, J.M. Rebollar. – P. 117-140 // Passive Microwave Components and Antennas / Edited by Vitaliy Zhurbenko. – Vukovar, Croatia: InTech Publisher, 2010. – 556 p.

3. Черноусов Ю. Д. Полосовые характеристики связанных резонаторов / Ю.Д. Черноусов, В.И. Иванников, И.В. Шеболаев, А.Е. Левичев, В.М. Павлов // Радиотехника и электроника. – 2010. – Т. 55, № 8. – С. 923-929.
4. Choocadee S. The simulation, design and implementation of bandpass filters in rectangular waveguides / S. Choocadee and S. Akatimagool // Electrical and Electronic Engineering. – 2012. – Volume 2, Number 3. – P. 152-157.
5. Черноусов Ю. Д. Тонкая диафрагма в прямоугольном волноводе / Ю.Д. Черноусов, А.Е. Левичев, В.М. Павлов, Г.К. Шабуилов // Вестник НГУ. Серия: Физика. – 2011. – Т. 6, Вып. 1. – С. 44 – 49.
6. Заргано Г. Ф. Линии передачи сложных сечений / Г.Ф. Заргано, А.М. Лерер, В.П. Ляпин, Г.П. Синявский. – Изд. Ростовского университета, 1983. – 320 с.
7. Мамедов Д. Б. Исследование сходимости метода матрицы рассеяния в задаче расчета СВЧ-фильтров с квази-Н модами / Д.Б. Мамедов, А.Г. Ющенко // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2015. – Т. 4, № 9(76). – С. 34-38
8. Стешенко С. А. Метод частичных областей с учетом особенностей во внутренних задачах с произвольными криво-координатными границами. Часть 2. Плоскопоперечные соединения и “in-line” объекты / С.А. Стешенко, С.А. Приколотин, А.А. Кириленко, Д.Ю. Кулик, Л.А. Рудь, С.Л. Сенкевич // Радиофизика и электроника. – 2013. – Т. 4 (18), № 3. – С. 13-21.
9. Кравченко В. Ф. Вычислительные методы в современной радиофизике / В.Ф. Кравченко, О.С. Лабунько, А.М. Лерер, Г.П. Синявский. – М. : Физматлит, 2009. – 464 с.
10. Никольский, В. В. Электродинамика и распространение радиоволн / В.В. Никольский, Т.И. Никольская. – М.: КД Либроком, 2015. – 544 с.
11. Градштейн И. С. Таблицы интегралов, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. – Под ред. А. Джеффри, Д. Цвиллингера. – 7-е изд; Пер. с англ. под ред. В. В. Максимова. – Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2011. – 1232 с.
12. Бахвалов Н. С. Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. – 636 с.
13. Dubrovka F. F. Wideband matching the dual frequency coaxial waveguide feed / F.F. Dubrovka, Yu.A. Ovsianyk, P.Ya. Stepanenko, O.S. Zakharchenko // Telecommunication Sciences. – 2012. – Vol. 3, No 2. – P. 53-60.
14. CST Microwave Studio, User Manual 5 ed., CST GmbH, Darmstadt, Germany 2004.

References

- [1] Drobakhin O. O., Plaksin S. V., Ryabchii V. D. and Saltykov D. Yu. (2013) *Tekhnika i poluprovodnikovaya elektronika SVCh* [Microwave Engineering and Semiconductor Electronics]. Sevastopol', Veber, 322 p.
- [2] Montejo-Garai J.R. and Rebollar J.M. (2010) Computer Aided Design of Waveguide Devices by Mode-Matching Methods. *Passive Microwave Components and Antennas*. DOI: 10.5772/9403

- [3] Chernousov Yu. D., Ivannikov V. I., Shebolaev I. V., Levichev A. E. and Pavlov V. M. (2010) Polosovye kharakteristiki svyazannykh rezonatorov [Band characteristics of coupled resonators]. *Radiotekhnika i elektronika*, Vol. 55, No 8, pp. 923–929.
- [4] Choocadee S. and Akatimagool S. (2012) The Simulation, Design and Implementation of Bandpass Filters in Rectangular Waveguides. *Electrical and Electronic Engineering*, Vol. 2, Iss. 3, pp. 152-157. DOI: 10.5923/j.eee.20120203.08
- [5] Chernousov Yu. D., Levichev A. E., Pavlov V. M. and Shamuilov G. K. (2011) Thin diaphragm in the rectangular waveguide. *Vestnik NGU. Seriya: Fizika*, Vol. 6, Iss. 1, pp. 44-49.
- [6] Zargano G. F., Lerer A. M., Lyapin V. P. and Sinyavskii G. P. (1983) *Linii peredachi slozhnykh sechenii* [Lines of transmission of complex sections]. Rostov university Publ., 320 p.
- [7] Mamedov D.B. and Yushchenko A.G. (2015) Research of scattering matrix method convergence in the computational problem of quasi-h mode microwave filters. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, Vol. 4, Iss. 9(76), pp. 34. DOI: 10.15587/1729-4061.2015.47992
- [8] Steshenko S. A., Prikolotin S. A., Kirilenko A. A., Kulik D. Yu., Rud' L. A. and Senkevich S. L. (2013) Mode-matching technique taking into account field singularities in the internal problems with piece-wise coordinate boundaries. Part 2. Plane junctions and “in-line” objects. *Radiofizika i elektronika*, Vol. 4 (18), No 3, pp. 13-21. (in Russian)
- [9] Kravchenko V. F., Labun'ko O. S., Lerer A. M. and Sinyavskii G. P. (2009) *Vychislitel'nye metody v sovremennoi radiofizike* [Computational methods in modern radiophysics], Moscow, Fizmatlit, 464 p.
- [10] Nikol'skii V. V. and Nikol'skaya T. I. (2015) *Elektrodinamika i rasprostranenie radiovoln* [Electrodynamics and propagation of radio waves]. Moscow, KD Librokom, 544 p.
- [11] Gradshteyn I.S. and Ryzhik I.M. (2007) *Table of Integrals, Series, and Products*, Elsevier, 1220 p. DOI: 10.1016/B978-0-12-294760-5.50001-5
- [12] Bakhvalov N. S., Zhidkov N. P. and Kobel'kov G. M. (2008) *Chislennyye metody* [Numerical methods]. Moscow, BINOM. Laboratoriya znaniy, 636 p.
- [13] Dubrovka F. F., Ovsianyuk Yu. A., Stepanenko P. Ya. and Zakharchenko O. S. (2012) Wideband matching the dual frequency coaxial waveguide feed. *Telecommunication Sciences*, Vol. 3, No 2, pp. 53-60.
- [14] CST Microwave Studio, User Manual 5 ed., CST GmbH, Darmstadt, Germany 2004.

Обобщенная математическая модель тонкой несимметричной индуктивной диафрагмы в прямоугольном волноводе

Захарченко О. С., Мартынюк С. Е., Степаненко П. Я.

Методом интегральных уравнений решена электродинамическая задача нахождения обобщенной матрицы рассеяния бесконечно тонкой несимметричной одно-сторонней индуктивной диафрагмы в прямоугольном волноводе. Получена система интегральных уравнений, порядок которой равен числу собственных волн прямоугольного волновода, поочередно падающих на диафрагму из левой частичной области. Решение каждого из них сводится к системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения неизвестного тангенциального электрического поля в отверстии связи по его собственным координатным функциям. Решение данной системы определяет распределение тангенциального электрического поля в окне диафрагмы, по которому рассчитывается обобщенная матрица рассеяния рассматриваемой неоднородности. Проведено численное исследование полученного решения и даны рекомендации относительно его применения на практике.

Ключевые слова: обобщенная матрица рассеяния; бесконечно тонкая несимметричная индуктивная диафрагма; прямоугольный волновод

Generalized Mathematical Model of Thin Asymmetric Inductive Diaphragm in Rectangular Waveguide

Zakharchenko O. S., Martynuk S. Ye., Stepanenko P. Ya.

Introduction. A significant number of microwave devices are constructed with applying the investigation results of thin asymmetric inductive diaphragm in rectangular waveguide. Increasing the requirements for the characteristics of these devices stipulates necessity to review the possibilities of existing electromagnetic methods in relation to increasing the accuracy of generalized scattering matrices calculation of this diaphragm. To obtain the high accuracy results of generalized scattering matrices calculation, a further study of integral equations method is represent considerable practical interest.

Mathematical model of diaphragm. An accurate novel solution for general scattering matrix of infinitely thin asymmetric one-sided diaphragm in rectangular waveguide has been obtained. The problem is formed as the system of integral equations along the number of waves which is incident on the diaphragm. By applying the Galerkin's method, each integral equation is reduced to system of linear algebraic equations relatively to coefficients of tangential electric field decomposition in diaphragm window by series of coordinate functions. The joint solution of all equations gives the distribution of tangential electric field in diaphragm window which is further used for finding the generalized scattering matrix.

Numerical results. Two approaches for finding the coupling coefficients of coordinate functions of diaphragm window and eigen functions of waveguide are investigated. An estimation of limiting possibilities of developed realization of the integral equations method at approximation of tangential electric field in diaphragm window by series of eigen scalar functions has been carried out. It is shown that the calculated results of module and phase of fundamental wave transmission coefficient through diaphragm slowly go to exact values when the order of linear algebraic equation system is increased.

Conclusions. The results of diaphragm investigation by using this algorithm have not only independent value but can be used to verify the accuracy of calculating the electromagnetic parameters of thin waveguide structures by using the general methods for solving electromagnetic problems, for example, FDTD. It is supposed that the results obtained in this work can be used in developing fast and high-precision calculation algorithms for frequency responses of multi-stage asymmetric waveguide structures.

Key words: generalised scattering matrix; infinitely thin asymmetric inductive diaphragm; rectangular waveguide